



I. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0 – dérivabilité à droite et à gauche en un point x_0 :

A. Dérivabilité :

a. Définitions :

Soit une fonction f tel que son domaine de définition contient un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

• f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$ $\ell = f'(x_0)$ s'appelle

le nombre dérivé de f en x_0 .

• f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_d = f'_d(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à droite de f en x_0 .

• f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_g = f'_g(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 .

b. Propriété :

Soit une fonction f .

f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

B. interprétation géométrique des nombres dérivés $f'(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$

a. Interprétation géométrique du nombre dérivée $f'(x_0)$:

• f est une fonction dérivable au point x_0 .

• (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

❖ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).

❖ Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ est

$$(T) : y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) .$$

❖ Si $f'(x) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse .

b. Exemple :

1. Trouver équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point

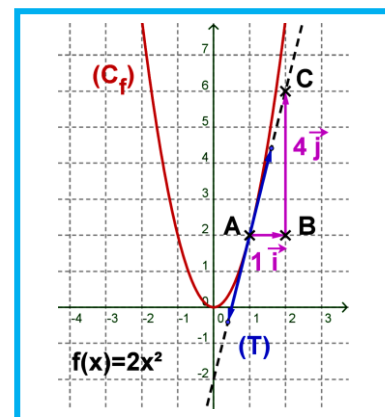
$$x_0 = 1 \text{ avec } f(x) = 2x^2 .$$

L'équation est $(T) : y = (x - 1)f'(1) + f(1)$ ou $(T) : y = (x - 1) \times 4 + 2$.

D'où le coefficient directeur est $m = 4$ et vecteur directeur est $\vec{u}(1,4) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

A partir du point $A(1, f(1))$ avec $f(1) = 2$

- On construit le point B tel que $\vec{AB} = \vec{1i}$ et on construit le point C tel que : $\vec{BC} = 4\vec{j}$.
- D'où la droite (AC) est la tangente (T) à (C_f) au point A.
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est A.



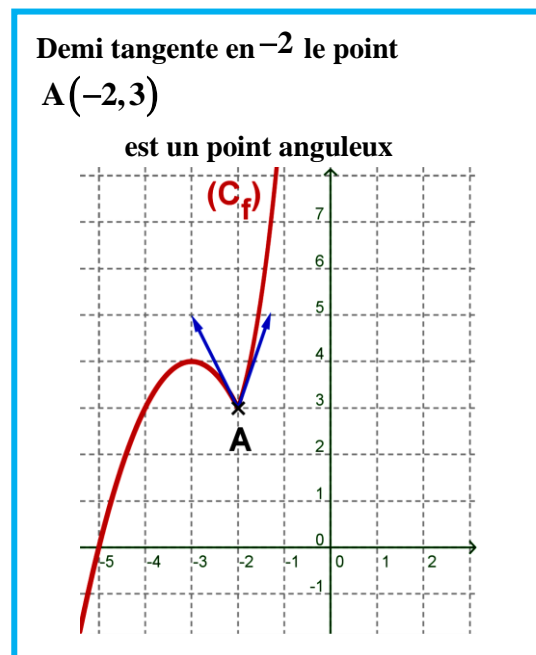
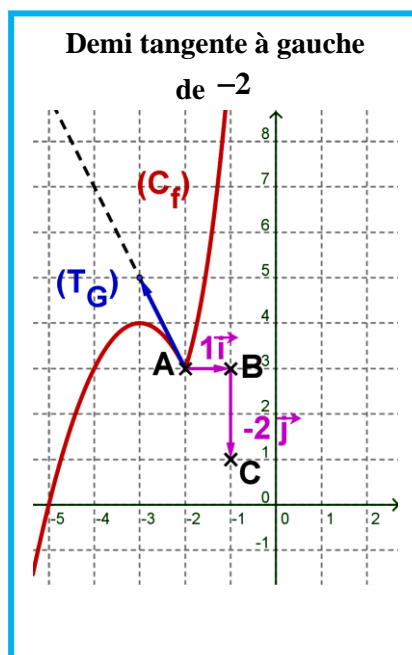
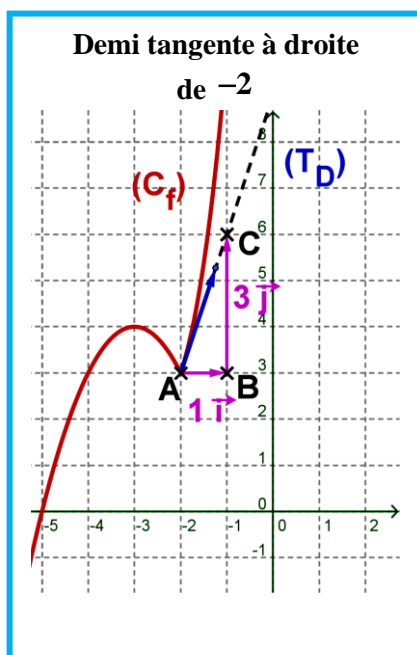
c. Interprétation géométrique des nombres dérivées $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$:

- ❖ Si f est dérivable à droite de x_0 on a une demi-tangente à droite de x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$.
- ❖ équation du demi tangente à droite de $-x_0$ est $(T_d): y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.
- ❖ Si f est dérivable à gauche de x_0 on a une demi-tangente à gauche de x_0 de coefficient directeur $f'_g(x_0)$.
- ❖ équation du demi tangente à gauche de $-x_0$ est $(T_g): y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.
- ❖ Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ donc f n'est pas dérivable en x_0 et le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux.

d. Exemple :

$$\text{soit } \begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases} \text{ on a } f'_d(-2) = 3 \text{ et } f'_g(-2) = -2$$

- équation du demi tangente à droite de -2 est $(T_d): y = (x+2)f'_d(-2) + f(-2)$ avec $x \geq x_0$.
- équation du demi tangente à gauche de -2 est $(T_g): y = (x+2)f'_g(-2) + f(-2)$ avec $x \leq x_0$.





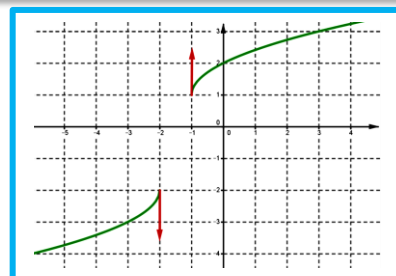
e. Remarque :

- si f n'est pas dérivable à droite (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées
- si f n'est pas dérivable à gauche (c.à.d. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$) dans ce cas on a demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées .

f. Exemple : exemple $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$.

❖ à droite de $x_0 = 1$ on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \infty$.

donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à droite du point $M(1, f(1))$



à gauche de $x_0 = -1$ on a : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \infty$. donc (C_f) admet demi

tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à gauche du point $M(-1, f(-1))$

g. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .

II. Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée première – dérivée seconde – dérivée n^{ième} d'une fonction :

A. Dérivabilité sur un intervalle :

a. Définition :

- f est une fonction dérivable sur $I =]a; b[$ si et seulement si f est d dérivable en tout point x_0 de I .
- f est une fonction dérivable sur $]a; b[$ si et seulement si f est d dérivable sur $I =]a; b[$ et f est dérivable à droite du point a .
- f est dérivable sur $]a; b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a; b[$ et f est dérivable à gauche de b
- f est dérivable sur $[a; b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a; b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b .

B. La fonction dérivée première d'une fonction – la fonction dérivée seconde – dérivée n^{ième} d' une fonction:

a. Définition :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on

note : $g = f'$. Ou encore $g : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow g(x) = f'(x)$ g s'appelle la fonction dérivée de f on note : $g = f'$.

- La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$
- En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$) et on note $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

**III. Les opérations sur les fonctions dérivables :****a. Propriété :**

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $I \forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

IV. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $f^n(x)$ - fonctions trigonométriques :**a. Propriété :**

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .
- f est une fonction dérivable sur un intervalle I .
 - ✓ La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a : $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.
 - ✓ Si pour tout x de I ; $f(x) \neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$.
- La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$.
- La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$.
- La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$ ou encore $f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b. Exemple : Calculer : $g'(x)$ pour $g(x) = (-2x^4 + 5x^2 + x - 3)^7$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } g'(x) &= [(-2x^4 + x - 3)^7]' \\ &= 7(-2x^4 + x - 3)^6 (-2x^4 + x - 3)' \\ &= 7(-2x^4 + x - 3)^6 (-8x^3 + 1) \end{aligned}$$

**VII.** Dérivabilité de la composée de deux fonctions :**a.** Théorème :

f dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0)).$$

b. Application :

- $(\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)}} ; x \in D_f, \text{ et } f(x) > 0.$
- $(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}.$
- $(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}.$
- $(\tan(ax+b))' = a \times [1 + \tan^2(ax+b)] = a \times \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ avec $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}.$

V. La fonction dérivée de la fonction réciproque :**a.** Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I et $f(I) = J$, f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction $(x_0 \in I) ; x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 ; (y_0 \in J)$

f est dérivable en x_0 } alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$
 $f(x_0) \neq 0$

ou encore $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$

b. Applications :

$n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{Q}^*$ et f est une fonction strictement positive et dérivable sur I

$$g'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\sqrt[n]{f(x)} \right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$$

$$g'(x) = (x^r)' = r x^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$$

$$\left([f(x)]^r \right)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$$

c. Exemple :

1. Calculer la fonction dérivée f' de f .

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \text{ et } f(x) = \sqrt[5]{x^2+1} \text{ et } f(x) = \sqrt[5]{(x^2+1)^7}$$

On a :



- $f'(x) = \left[\sqrt[5]{x} \right]' = \left[x^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$.
- $f'(x) = \left[\sqrt[5]{(x^2+1)} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{5}} \right]' = \frac{1}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{-\frac{4}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^4}$.
- $f'(x) = \left[\sqrt[5]{(x^2+1)^7} \right]' = \left[(x^2+1)^{\frac{7}{5}} \right]' = \frac{7}{5} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{7}{5}-1} = \frac{14}{7} x (x^2+1)^{\frac{2}{5}} = \frac{14}{7} x \sqrt[5]{(x^2+1)^2}$.

VI. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

VI. Applications de la fonction dérivée première :

Remarque :

- dans le reste de ce chapitre f est une fonction numérique de la variable réelle x.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .



A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée :

a. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I .

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I alors la fonction f est strictement croissante sur I .
(même si f' s'annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
(même si f' s'annule en un points fini de I ne change pas la monotonie de f)
- Si la fonction f' est nulle sur I (sur I tout entier) alors f est constante .

b. Exemple :

Etudier les variations de f sur \mathbb{R} avec $f(x) = (2x+4)^2$.

- On calcule : f' .

$$f'(x) = [(2x+4)^2]'$$

$$= 2(2x+4)'(2x+4) = 2 \times 2(2x+4) = 8x+16$$

- Signe de f' :

$$\text{On a } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8x+16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Donc : f' est positive sur $[-2, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, -2]$.

- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$	$f(-2) = 0$	$+\infty$

B. Extremums d'une fonction dérivable :

a. Propriété :

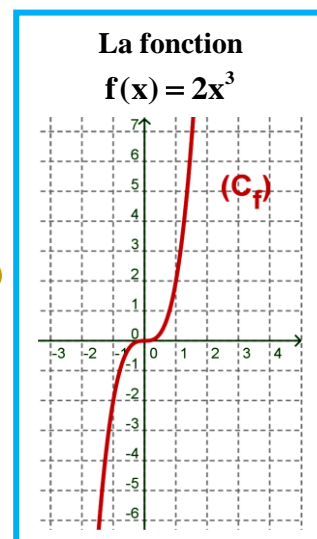
f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : Si $f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

b. Exemple :

$f(x) = 2x^3$ on a $f'(x) = 6x^2$ d'où $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum de la fonction f .





c. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$
est un extremum de la fonction f

VII. Applications de la fonction dérivée deuxième :

A. Position relative de la tangente et la courbe – la concavité :

a. Propriété et définition :

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives . on note \cup)

$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes des $x \in I$.

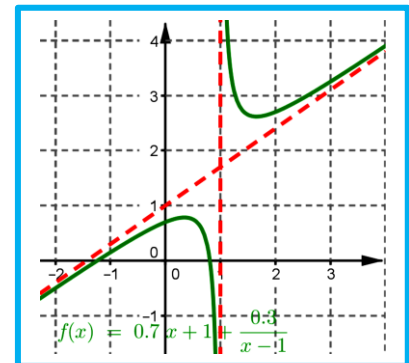
Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives . on note \cap) .

b. Exemple :

Exemple 1 :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f .

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$: la courbe (C_f) de f est **convexe**.
(ou sa concavité est dans le sens des **ordonnées positives**) .
- Sur l'intervalle $]-\infty, 1[$: la courbe (C_f) de f est **concave**.
(ou sa concavité est dans le sens des **ordonnées négatives**) .



Exemple 2 :

Le tableau ci-contre représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	-	0	+
Concavité de (C_f)	\cap	\cup	\cap	\cup		\cup

B. Points d'inflexions :**a. Propriété et définition :**

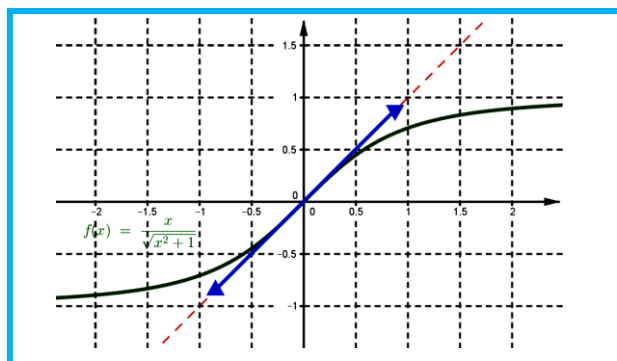
f est une fonction dérivable deux fois sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.





b. Exemple :**Exemple 1 :**

• Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

• (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exemple 2 :

Le tableau suivant représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$
Concavité de (C_f)						

• Le point d'abscisse $x_0 = -5$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car $f''(-5) = 0$ et f'' change de signe au voisinage de $x_0 = -5$.

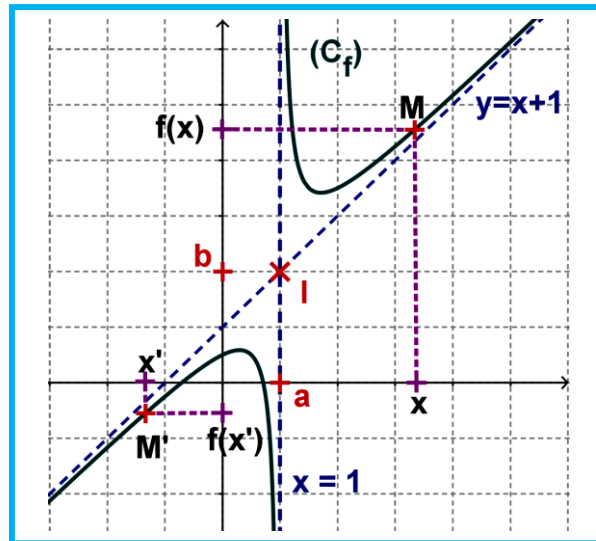
• Le point d'abscisse $x_1 = 2$ n'est pas un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car f'' change de signe au voisinage de $x_1 = 2$

VIII. Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction :**A. Centre de symétrie de la courbe d'une fonction :****a. Propriété :**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie au courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

b. Exemple :



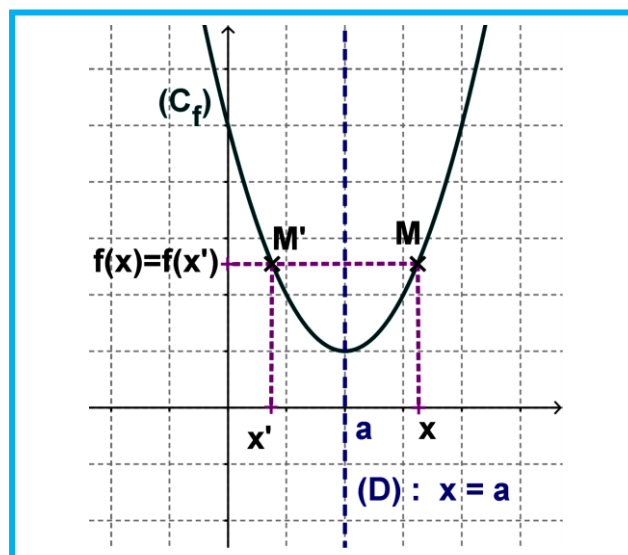
B. axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La droite d'équation $D: x = a$ est axe de symétrie au courbe $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

b. Exemple :



IX. Branches infinies d'une fonction :

A. Branches infinies :

**a. Définition :**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de (C_f) tend vers l'infinie on dit que la courbe (C_f) admet une branche infinie .

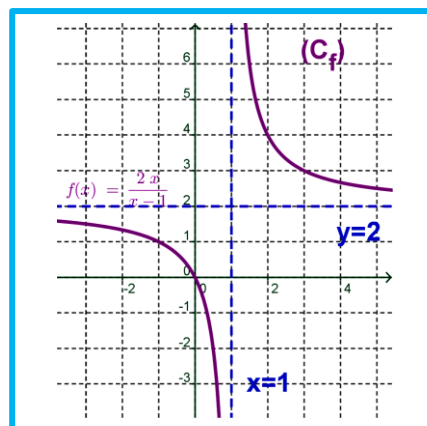
B. Asymptote verticale :**a. Définition :**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (C_f) (à droite de a ou à gauche de a).

b. Exemple :

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$.

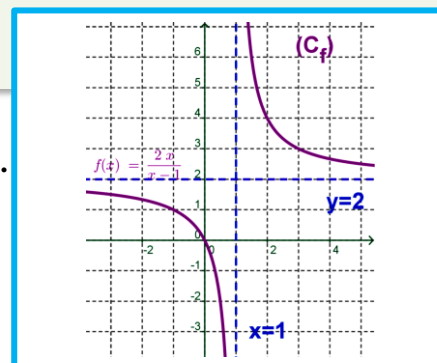
**C. Asymptote horizontale****a. Définition :**

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $[a, +\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty, a[\subset D_f$) dans un plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$) alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$) est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

b. Exemple :

Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$.

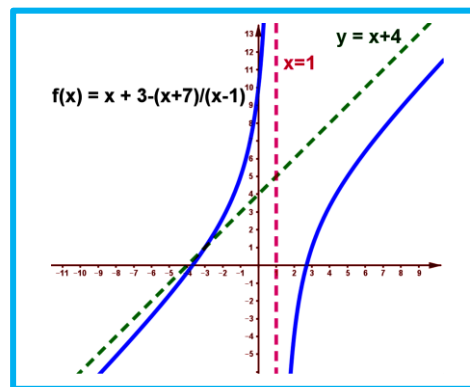


**D. Asymptote oblique :****a. Définition :**

- Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $[a, +\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty, a[\subset D_f$) dans un plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - $a \in \mathbb{R}^*$ ($a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$) et $b \in \mathbb{R}$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.

b. Exemple :

Soit $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$.



(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = x + 3$ voisinage de $\pm\infty$

c. Propriété :

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

- Pour déterminer a on calcule : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ (c.à.d. $a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$), donc on a deux cas particulières .
- Pour déterminer b on calcule : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (c.à.d. $b \neq \pm\infty$) . donc on a la troisième cas particulière .
- **Les cas particulières**
 - **1^{ère} cas particulière :** $a = \pm\infty$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des ordonnés .
 - **2^{ème} cas particulière :** $a = 0$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des abscisses .
 - **3^{ème} cas particulière :** $b = \pm\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) la droite d'équation $y = ax$.



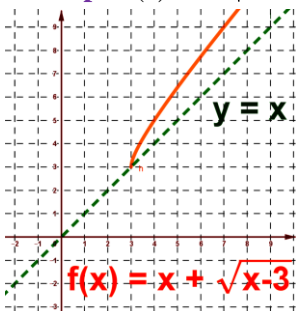
les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite

$y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

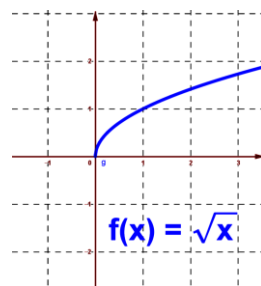
Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

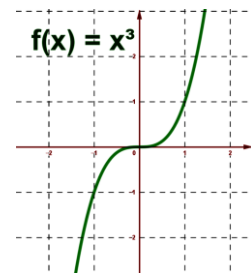
Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple $f(x) = x^3$



X. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .(complément)

a. Définition :

f est une fonction dérivable au point a

- La fonction u tel que : $u : x \rightarrow f(a) + (x-a)f'(a)$ (ou encore $(x-a=h)$; $v : h \rightarrow f(a) + hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .
- Quand x est très proche de a le nombre $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a) + hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ avec $x-a=h$.

C. Exemple :

❖ Exemple 1 :

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x) = x^2$ et $a = 1$.

Correction :

f est une fonction dérivable au point 1 avec $f'(1) = 2$ approximation affine de $f(1+h)$ est :

$$f(1+h) \approx hf'(1) + f(1) \approx 2h + 1.$$

$$\text{Conclusion : } f(1+h) = (1+h)^2 \approx 2h + 1.$$

Application du résultat :

On prend $h = 0,001$ d'où : $f(1,001) = f(1+0,001) \approx 2 \times 0,001 + 1$ donc $f(1+0,001) \approx 1,002$.

On vérifie : $f(1,001) = (1,001)^2 = 1,002001$ donc $1,002 \approx 1,002001$.



Technique de calcul : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h+1$.

❖ **Exemple 2 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

Correction :

On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$ et $h = 0,002$ d'où $\sqrt{9,002} = f(9+0,002)$.

On calcule le nombre dérivé de f en 9 on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\cancel{\sqrt{x} - 3}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

D'où : f est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est $f'(9) = \frac{1}{6}$.

On trouve une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

On a : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ d'où $f(9+0,002) \approx f(9) + 0,002 \times f'(9)$.

Donc : $f(9+0,002) \approx \sqrt{9} + 0,002 \times \frac{1}{6}$ par suite $f(9+0,002) \approx 3,000333333$.

On remarque que $\sqrt{9,002} \approx 3,000333333$ la calculatrice donne : $\sqrt{9,002} \approx 3,000333315$ d'où la précision est 3×10^{-8} .

1. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x) = x^2$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1+2h$.
- Pour la fonction : $f(x) = x^3$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^3 \approx 1+3h$.
- Pour la fonction : $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \approx 1-h$.

XI. Résumer des branches infinies :



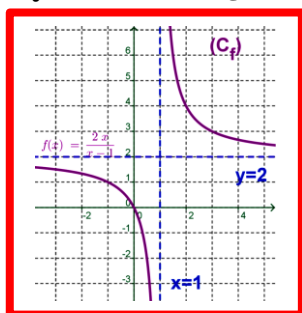
Les branches infinies

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$

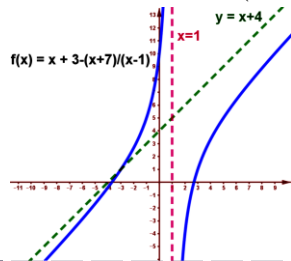


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$



Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

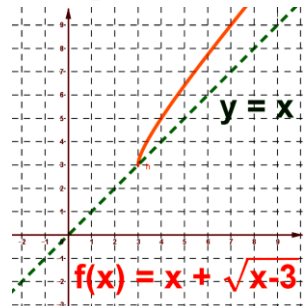
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$

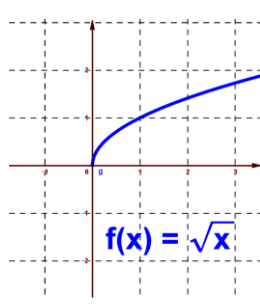


les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$

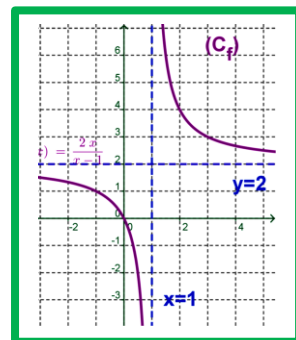


Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple $f(x) = x^3$

